

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**  
**Проректор по учебной работе**

**А.А. Воронов**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Кратные интегралы и теория поля
<b>по направлению:</b>	Системный анализ и управление
<b>профиль подготовки:</b>	Управление инновациями в бизнесе Физтех-школа бизнеса высоких технологий кафедра высшей математики
<b>курс:</b>	2
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: А.А. Скубачевский, канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель

Программа обсуждена на заседании кафедры высшей математики 23.11.2023

## Аннотация

В курсе изучаются неявные функции, экстремумы многих переменных, многомерное интегрирование. Приводятся необходимые сведения по кривым и поверхностям в  $R^3$ , определяются криволинейные и поверхностные интегралы. Даются доказательства интегральных теорем Грина, Гаусса-Остроградского и Стокса о связях между различными типами интегралов. Кратко рассматриваются основные операции математической теории поля (в т.ч. и формальные преобразования с оператором набла), изучаются условия потенциальности и соленоидальности векторных полей.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

- дальнейшее ознакомление студентов с методами математического анализа, формирование у них доказательного и логического мышления.

#### Задачи дисциплины

- формирование у обучающихся теоретических знаний и практических навыков в задачах поиска безусловного и условного экстремумов функции многих переменных, теории меры и интеграла, теории поля;
- подготовка слушателей к изучению смежных математических дисциплин;
- приобретение навыков в применении методов математического анализа в физике и других естественнонаучных дисциплинах.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
УК-6 Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.2 Способен планировать самостоятельную деятельность в решении профессиональных задач; подвергать критическому анализу проделанную работу; находить и творчески использовать имеющийся опыт в соответствии с задачами саморазвития

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- теорему о неявной функции;
- определения экстремума функции многих переменных и условного экстремума функции многих переменных при наличии связей, необходимые и достаточные условия в задачах нахождения безусловного, а также условного экстремума при наличии связей;
- определение кратного интеграла Римана, критерий интегрируемости функции, достаточное условие интегрируемости функции, свойства интегрируемых функций, теорему о сведении кратного интеграла к повторному, физические приложения интеграла;
- основные факты и формулы теории поля (формулы Грина, Остроградского-Гаусса, Стокса), физический смысл формул теории поля.

уметь:

- исследовать на экстремум функции многих переменных;
- решать задачи на условный экстремум методом множителей Лагранжа;
- вычислять интеграл от функции многих переменных по множеству;
- уметь решать прикладные физические задачи: вычислять массу тела, моменты инерции, объёмы и т.п.
- применять формулы теории поля для решения математических задач: вычисление интегралов, нахождение площадей и объёмов тел, площадей поверхностей;
- применять формулы теории поля для решения физических задач: проверка потенциальности и соленоидальности поля, нахождение работы поля при движении материальной точки и т.п.;
- уметь проводить вычисления с оператором набла.

владеть:

- логическим мышлением, методами доказательств математических утверждений;
- навыками вычисления интегралов и навыками применения теорем теории поля в математических и физических приложениях;
- умением пользоваться необходимой литературой для решения задач.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Теорема о неявной функции	4	4		5
2	Безусловный экстремум. Необходимые и достаточные условия	2	2		5
3	Условный экстремум функции многих переменных при наличии связи: исследование при помощи функции Лагранжа.	4	4		7
4	Кратный интеграл и его свойства	6	6		8
5	Криволинейные интегралы. Формула Грина	2	2		5
6	Поверхности. Поверхностные интегралы	6	6		7
7	Теория поля: формулы Остроградского-Гаусса и Стокса	6	6		8
Итого часов		30	30		45
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 3 (Осенний)

###### 1. Теорема о неявной функции

Теорема о неявной функции, заданной одним уравнением. Теорема о неявных функциях, заданных системой уравнений (без доказательства). Локальная обратимость отображения пространств одинаковой размерности с ненулевым якобианом.

## 2. Безусловный экстремум. Необходимые и достаточные условия

Экстремумы функций многих переменных: необходимое условие, достаточное условия.

## 3. Условный экстремум функции многих переменных при наличии связи: исследование при помощи функции Лагранжа.

Необходимые и достаточные условия

## 4. Кратный интеграл и его свойства

Кратный интеграл Римана. Суммы Римана и суммы Дарбу. Критерии интегрируемости. Интегрируемость функции, непрерывной на измеримом компакте. Свойства интегрируемых функций: линейность интеграла, аддитивность интеграла по множествам, интегрирование неравенств, теоремы о среднем, непрерывность интеграла. Сведение кратного интеграла к повторному.

Геометрический смысл модуля и знака якобиана отображения двумерных пространств. Теорема о замене переменных в кратном интеграле (доказательство для двумерного случая).

## 5. Криволинейные интегралы. Формула Грина

Формула Грина. Потенциальные векторные поля на плоскости. Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.

## 6. Поверхности. Поверхностные интегралы

Простая гладкая поверхность. Поверхностный интеграл первого рода. Независимость выражения интеграла через параметризацию поверхности от допустимой замены параметров. Площадь поверхности. Ориентация простой гладкой поверхности. Поверхностный интеграл второго рода, выражение через параметризацию поверхности. Кусочно-гладкие поверхности, их ориентация и интегралы по ним.

## 7. Теория поля: формулы Остроградского-Гаусса и Стокса

Формула Гаусса-Остроградского. Дивергенция векторного поля, ее независимость от выбора прямоугольной системы координат и геометрический смысл. Соленоидальные векторные поля. Связь соленоидальности с обращением в нуль дивергенции поля. Понятие о векторном потенциале.

Формула Стокса. Ротор векторного поля, его независимость от выбора прямоугольной системы координат и геометрический смысл. Потенциальные векторные поля. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. Связь потенциальности с обращением в нуль ротора поля.

Вектор «набла» и действия с ним. Основные соотношения содержащие вектор «набла». Лапласиан и градиент по вектору для скалярного и векторного поля.

## 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная доской, мультимедиа проектором, экраном и микрофоном.

## 6. Перечень рекомендуемой литературы

### Основная литература

1. Лекции по математическому анализу [Текст] : в 2 ч. : учеб. пособие для вузов. Ч. 2 / Г. Е. Иванов ; М-во образования Рос. Федерации, Моск. физико-техн. ин-т (гос. ун-т) .— 2-е изд., испр. — М. : Изд-во МФТИ, 2004 .— 230 с.

2. Лекции по математическому анализу [Текст] : [в 2 ч.]. Ч. 2 : учеб. пособие для вузов : рек. УМО МФТИ / Г. Н. Яковлев .— М. : Физматлит, 2001 .— 480 с.
3. Краткий курс математического анализа [Текст] : учебник для вузов / Л. Д. Кудрявцев .— 3-е изд., перераб. — М. : Физматлит, 2002 ,2003, 2005 .— Т. 2 : Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. Гармонический анализ. - 2002. - 424 с.
4. Курс математического анализа [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин .— 5-е изд. — М. : БИНОМ. Лаб. знаний, 2013 .— 672 с.
5. Сборник задач по математическому анализу [Текст] : в 3 ч. Ч. 3 : Функции нескольких переменных : учеб. пособие для вузов / Л. Д. Кудрявцев [и др.] ; под ред Л. Д. Кудрявцева .— М. : Наука : Физматлит, 1995 .— 496 с.
6. Лекции по математическому анализу [Текст] : учебник для вузов / О. В. Бесов .— М. : Физматлит, 2014 .— 480 с.
7. Лекции по математическому анализу [Текст] : в 3 ч. Ч. 3 : учеб. пособие для вузов. Кратные интегралы. Гармонический анализ / А. Ю. Петрович ; М-во образования и науки, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М. : МФТИ, 2013 .— 311 с.

#### Дополнительная литература

1. Курс математического анализа [Текст] : в 2 т. : учебник для вузов : доп. М-вом образования СССР. Т. 1 / С. М. Никольский .— 3-е изд., перераб. и доп. — М. : Наука, 1983 .— 464 с.
2. Курс математического анализа [Текст] : в 2 т. : учебник для вузов : доп. М-вом образования СССР. Т. 2 / С. М. Никольский .— 3-е изд., перераб. и доп. — М. : Наука, 1983 .— 448 с.
3. Основы математического анализа [Текст] : в 2 т. Т.1 : учебник для вузов / Г. М. Фихтенгольц .— 6-е изд., стереотип. — М. : Наука, 1968 .— 440 с.
4. Основы математического анализа [Текст] : в 2 т. Т. 2 : учеб. пособие для вузов / Г. М. Фихтенгольц .— 5-е изд., стереотип. — М. : Наука, 1968 .— 463 с.  
Фихтенгольц, Г. М.  
Курс дифференциального и интегрального исчисления [Текст]. В 3 т. Т. 2 : учебник для вузов / Г. М. Фихтенгольц .— 13-е изд., стереотип. — СПб. : Лань, 2019 .— 800 с. : ил. — (Классическая учебная литература по математике). - Алф. указ.: с. 795-800. - 100 экз. - ISBN 978-5-8114-3994-2(в пер.) .

#### **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

1. <http://lib.mipt.ru/catalogue/1195/?page=0> – электронная библиотека Физтеха, раздел «Анализ. Учебники по элементарному анализу».
2. <http://www.exponenta.ru> – образовательный математический сайт.
3. <http://mathnet.ru> – общероссийский математический портал.
4. <http://www.edu.ru> – федеральный портал «Российское образование».
5. <http://benran.ru> –библиотека по естественным наукам Российской академии наук.
6. <http://www.i-exam.ru> – единый портал Интернет-тестирования в сфере образования.

#### **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, Scilab и др.

#### **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Приведены в ежегодно разрабатываемых домашних заданиях.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

**по направлению:** Системный анализ и управление  
**профиль подготовки:** Управление инновациями в бизнесе  
Физтех-школа бизнеса высоких технологий  
кафедра высшей математики  
**курс:** 2  
**квалификация:** бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Экзамен

**Разработчик:** А.А. Скубачевский, канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
УК-6 Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.2 Способен планировать самостоятельную деятельность в решении профессиональных задач; подвергать критическому анализу проделанную работу; находить и творчески использовать имеющийся опыт в соответствии с задачами саморазвития

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Кратные интегралы и теория поля» обучающийся должен:

### знать:

- теорему о неявной функции;
- определения экстремума функции многих переменных и условного экстремума функции многих переменных при наличии связей, необходимые и достаточные условия в задачах нахождения безусловного, а также условного экстремума при наличии связей;
- определение кратного интеграла Римана, критерий интегрируемости функции, достаточное условие интегрируемости функции, свойства интегрируемых функций, теорему о сведении кратного интеграла к повторному, физические приложения интеграла;
- основные факты и формулы теории поля (формулы Грина, Остроградского-Гаусса, Стокса), физический смысл формул теории поля.

### уметь:

- исследовать на экстремум функции многих переменных;
- решать задачи на условный экстремум методом множителей Лагранжа;
- вычислять интеграл от функции многих переменных по множеству;
- уметь решать прикладные физические задачи: вычислять массу тела, моменты инерции, объёмы и т.п.
- применять формулы теории поля для решения математических задач: вычисление интегралов, нахождение площадей и объёмов тел, площадей поверхностей;
- применять формулы теории поля для решения физических задач: проверка потенциальности и соленоидальности поля, нахождение работы поля при движении материальной точки и т.п.;
- уметь проводить вычисления с оператором набла.

### владеть:

- логическим мышлением, методами доказательств математических утверждений;
- навыками вычисления интегралов и навыками применения теорем теории поля в математических и физических приложениях;
- умением пользоваться необходимой литературой для решения задач.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Текущий контроль осуществляется на основе балльно-рейтинговой системы (БРС) оценки знаний по изучаемой дисциплине. БРС учитывает выполнение студентами совокупности домашних заданий и контрольных работ в соответствии с учебным планом. Данные о посещаемости и текущей успеваемости вносятся преподавателями в специальные журналы и учитываются в БРС.

Текущий контроль на основе домашних заданий осуществляется в течении учебного семестра в сроки, установленные Учебным управлением, в соответствии с учебным планом.

Для сдачи задания студент обязан предоставить решение задачи домашнего задания в письменной форме, ответить на вопросы преподавателя и написать контрольную работу по заданию, по которой проверяются знание понятий и утверждений по темам сдаваемого задания и умению решать задачи.

Во время выполнения контрольной работы нельзя пользоваться помощью других лиц, вычислительной техники и мобильными телефонами.

#### **4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся**

1. Теорема о неявной функции, заданной одним уравнением. Теорема о неявных функциях, заданных системой уравнений.
2. Необходимые условия локального экстремума, достаточные условия локального экстремума.
3. Условный экстремум. Метод Лагранжа нахождения точек условного экстремума: необходимые условия, достаточные условия.
4. Кратный интеграл Римана. Критерии интегрируемости функции. Интегрируемость функции, непрерывной на замкнутом измеримом множестве.
5. Мера графика функции многих переменных, мера подграфика неотрицательной функции.
6. Свойства интегрируемых функций: линейность интеграла, аддитивность интеграла по множествам, монотонность интеграла, непрерывность интеграла, теорема о среднем.
7. Интегрируемость функции, непрерывной и ограниченной на открытом измеримом множестве.
8. Сведение кратного интеграла к повторному.
9. Теорема о мере образа и теорема о замене переменных в кратном интеграле при простом отображении; без доказательства: теорема о расщеплении отображения. Геометрический смысл модуля якобиана и знака якобиана отображения в двумерном случае.
10. Теорема о замене переменных в кратном интеграле.
11. Формула Грина.
12. Потенциальные векторные поля. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.
13. Простая гладкая поверхность. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Ориентация поверхности.
14. Площадь поверхности, поверхностные интегралы первого и второго рода.
15. Формула Гаусса-Остроградского.
16. Геометрическое определение дивергенции. Соленоидальные векторные поля.
17. Формула Стокса.
18. Геометрическое определение вихря. Связь потенциальности и безвихревости векторного поля.
19. Аппроксимация криволинейного интеграла второго рода интегралом по вписанной ломаной.

#### **Критерии оценивания**

Оценка «отлично (10)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;

оценка «отлично (9)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые были самостоятельно обнаружены и исправлены;

оценка «отлично (8)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые после указания экзаменатора были самостоятельно исправлены;



оценка «хорошо (7)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает неточности в ответе или делает несущественные ошибки при решении задач;

оценка «хорошо (6)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает небольшие ошибки в ответе и (или) при решении задач;

оценка «хорошо (5)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но отвечает неуверенно и (или) допускает ошибки при решении задач;

оценка «удовлетворительно (4)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, если при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «удовлетворительно (3)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, не владеющему некоторыми разделами учебной программы, но умеющему применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется обучающемуся, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;

оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется обучающемуся, показавшему полное незнание учебной программы дисциплины.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется 1 астрономический час на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не должен превышать двух астрономических часов. Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться только программой дисциплины.

«СОГЛАСОВАНО»  
Проректор по учебной работе  
\_\_\_\_\_ А. А. Воронов  
« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2022

## Балльно-рейтинговая система оценки знаний студентов

Дисциплина: **Кратные интегралы и теория поля**, (кроме Л \_\_\_\_\_ )  
2 курс, 3 семестр, экзамен

Кафедра высшей математики

Виды занятий	Сумма баллов
1.Контрольная работа № 1 по 1 заданию	0-9
2.Контрольная работа № 2 по 2 заданию	0-9
3. Задание № 1 (тетрадь и ее защита)	0-3
4.Задание № 2 (тетрадь и ее защита)	0-3
5. Проверка теоретических знаний	0-3
6.Работа на семинарах	0-3
7. Итоговый контроль Экзамен (устный ответ)	0-70
<b>ИТОГО</b>	<b>0-100</b>

Сумма баллов за устный ответ начисляется по формуле  $N*7$ , где  $N \geq 3$  – предварительная оценка за устный ответ по десятибалльной шкале. Если  $N=1, 2$ , то итоговая оценка совпадает с  $N$ .

Соответствие оценок итоговой академической успеваемости балльно-рейтинговой системы.

Баллы БРС	Оценки	
93 – 100	10	отлично
86 – 92	9	
79 – 85	8	
72 – 78	7	хорошо
65 – 71	6	
58 – 64	5	
51 – 57	4	удовлетворительно
44 – 50	3	
30 – 43	2	
0 – 29	1	неудовлетворительно

Регламент принятия домашних заданий и проведения экзамена определяется «Положением о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации студентов на кафедре высшей математики».

Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ Г.Е. Иванов

**ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 1**

Дисциплина: КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ТЕОРИЯ ПОЛЯ

1. Экстремумы функций многих переменных: необходимые условия локального экстремума, достаточные условия локального экстремума.
2. Вычислить интеграл  $\iiint_G (x+y) dx dy dz$ , где область  $G$  ограничена плоскостями  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $x + y = 1$ ,  $z = x + y$ .
3. Пусть непрерывно дифференцируемое поле  $\mathbf{F}$  удовлетворяет условиям  $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$  и  $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$  в  $\mathbb{R}^3$ . Доказать, что поле  $\mathbf{F}$  потенциально и его потенциал  $U$  является решением уравнения Лапласа  $\Delta U = 0$ , где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ .

**ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 11**

Дисциплина: КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ТЕОРИЯ ПОЛЯ

1. Формула Грина.
2. Исследовать на экстремум в области  $x > 0$  функцию  $u = e^{xy}$  при условии  $x^2 + y^2 = 2$ .
3. Найти площадь части сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ , удовлетворяющей условию  $x^2 + y^2 \geq 1$ .